24/05/2018

Μάθημα 12ο
Στατιστική Συμπερασματολογία

Τεστ Σημαντικότητας

1ο) Βρίσκουμε μια σ.σ. με γνωστή κατανομή όταν H_0: αληθής.
2ο) Κατασκευάζουμε τη περιοχή απόρριψης κατά τέτοιο τρόπο ώστε μικρές ή μεγάλες τιμές της σ.σ. να αποδηλώνουν αποδοχή ή απόρριψη της H_0

1ο παράδειγμα

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $N(\mu_1, \sigma^2)$
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τ.δ. $N(\mu_2, \sigma^2)$
σ^2 άγνωστη. $H_0: \underbrace{\mu_1 = \mu_2}_{\mu_1 - \mu_2 = 0}$ $\quad H_1: \mu_1 > \mu_2$

Λύση
Ισχύει:
$$\left.\begin{array}{l} \bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma^2/n) \\ \bar{Y} \sim N(\mu_2, \sigma^2/m) \end{array}\right\} \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$$

$$\xrightarrow[\mu_1 = \mu_2]{H_0: \text{αληθής}} \underbrace{\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}}_{*} \sim N(0,1)$$

Όμως σ: άγνωστο. Άρα το * δεν είναι σ.σ.
$\Rightarrow$ Πρέπει να απαλλαχτώ από αυτό

Ισχύει: $\dfrac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$

και: $\dfrac{(m-1)S_y^2}{\sigma^2} \sim X^2_{m-1}$ $\Rightarrow$

X και Y ανεξάρτητα ⇒ "Συνθέτω"

$$\Rightarrow \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n+m-2}$$

Έχω τυπική κατανομή N(0,1) και την X^2 ⇒

⇒ προκύπτει η t.

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{\sigma^2}}{(n+m-2)}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n+m-2}$$

Απορ. την H_0 για μικρές τιμές του t ή μεγάλες;

Όταν απορ. την H_0 ⇒ $\mu_1 > \mu_2$
⇒ $\mu_1 - \mu_2 > 0$
⇒ $\bar{X} - \bar{Y} > 0$

Απορρίπτω την H_0
για μεγάλες τιμές
του t
⇓
$t \geq K$

Εκτος: 3.18, 3.19, 3.21

Αν είχα $H_0: \mu_1 < \mu_2 \Rightarrow t \leq K$
Αν είχα $H_0: \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow |t| > K$

Επομένως: Απορρίπτω την H_0 για $t \geq K$
όπου K τ.ω. :

$$P(t \geq K \,/\, H_0: \text{αληθής}) = a$$

Άρα: $K = t_{n+m-2,\, a}$

Άσκηση 3.17

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τδ $N(\mu_x, \sigma_x^2)$
$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ τδ $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ | Ανεξάρτητα
$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $H_1: \sigma_x^2 > \sigma_y^2$ Με τεστ σημαντικότητας

Λύση

Παίρνω: $\dfrac{(n-1) S_x^2}{\sigma_x^2} \sim X^2_{n-1}$

και: $\dfrac{(n-1) S_y^2}{\sigma_y^2} \sim X^2_{n-1}$

και: X, Y ανεξάρτητα.

$\Longrightarrow$

$$\frac{\frac{(n-1)S^2_x}{\sigma^2_x} \Big/ (n-1)}{\frac{(n-1)S^2_y}{\sigma^2_y} \Big/ (n-1)} \sim F_{n-1,n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2_y}{\sigma^2_x} \frac{S^2_x}{S^2_y} \sim F_{n-1,n-1}$$

Όταν Ho αληθής τότε: $\boxed{F = \frac{S^2_x}{S^2_y} \overset{H_o}{\sim} F_{n-1,n-1}}$

Άρα βρήκα την σσ. F που ήθελα (δεν έχει άγνωστη ποσότητα μέσα)

Απορρίπτω την Ho για ⊕ μεγάλες τιμές του F : $\boxed{F \geq K}$

και $\boxed{K = F_{n-1,n-1,a}}$

⊕ $\sigma^2_x > \sigma^2_y \Rightarrow \frac{\sigma^2_x}{\sigma^2_y} > 1$

Άρα: $\frac{S^2_x}{S^2_y} > 1$ οπότε $F > 1$

$\Rightarrow$ μεγάλες τιμές του k.

Άσκηση 3.14

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. $N(\mu_1, 1)$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ τ.δ. $N(\mu_2, 1)$

Με τεστ. πηλίκου πιθανοφάνειας

$H_0: \mu_1 = \mu_2 (=\mu)$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Λύση

Τεστ. πηλίκου πιθανοφάνειας $\Rightarrow$

$$\lambda = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} \prod f(x_i, \theta)}{\max_{\theta \in \Theta} \prod f(x_i, \theta)}$$

• Υπό την H_0 : $\theta = \mu$.

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \underbrace{(2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\Sigma(X_i-\mu)^2}}_{\text{Από 1ο δείγμα}} \cdot \underbrace{(2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\Sigma(Y_i-\mu)^2}}_{\text{Από 2ο δείγμα}} =$$

$$= (2\pi)^{-n} e^{-\frac{1}{2}\{\Sigma(X_i-\mu)^2 + \Sigma(Y_i-\mu)^2\}}$$

• $$\log \prod f(x_i, \theta) = -n\log(2\pi) - \frac{1}{2}\left\{\Sigma(X_i-\mu)^2 + \Sigma(Y_i-\mu)^2\right\}$$

• $$\frac{\partial}{\partial \mu} \log \prod f(x_i, \theta) = -\frac{1}{2}(-2)\left\{\Sigma(X_i-\mu) + \Sigma(Y_i-\mu)\right\}$$

• Είναι $\frac{\partial}{\partial \mu} \log \prod f(x_i, \theta) = 0 \longrightarrow \boxed{\hat{\mu} = \frac{\Sigma X_i + \Sigma Y_i}{2n}}$

(5)

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{n\bar{X} + n\bar{Y}}{2n} \Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}}$$

Σε όλο τον παραμετρικό χώρο Θ:

$$\prod f(x_i, \theta) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\Sigma(X_i - \mu_1)^2} (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\Sigma(Y_i - \mu_2)^2}$$

$$\theta = (\mu_1, \mu_2)$$

Ομοια με πριν: $\boxed{\hat{\mu}_1 = \bar{X}}$ $\boxed{\hat{\mu}_2 = \bar{Y}}$

Άρα:
$$\lambda = \frac{(2\pi)^{-n} e^{-\frac{1}{2}\{\Sigma(X_i - \hat{\mu})^2 + \Sigma(Y_i - \hat{\mu})^2\}}}{(2\pi)^{-n} e^{-\frac{1}{2}\{\Sigma(X_i - \bar{X})^2 + \Sigma(Y_i - \bar{Y})^2\}}} \leq k$$

$$\Rightarrow \lambda = e^{-\frac{1}{2}\{\Sigma(X_i - \hat{\mu})^2 + \Sigma(Y_i - \hat{\mu})^2 - \Sigma(X_i - \bar{X})^2 - \Sigma(Y_i - \bar{Y})^2\}} \leq k$$

Κάνω αντικατάσταση: $\Sigma(X_i - \hat{\mu})^2 = \Sigma(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \hat{\mu})^2$

$-\bar{X} + \bar{X}$

$$\Sigma(Y_i - \hat{\mu})^2 = \Sigma(Y_i - \bar{Y}) + n(\bar{Y} - \hat{\mu})^2$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{n}{2}\{(\bar{X} - \hat{\mu})^2 + (\bar{Y} - \hat{\mu})^2\}} \leq k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(\bar{X} - \hat{\mu})^2 + (\bar{Y} - \hat{\mu})^2\} \geq k_2 \Rightarrow$$

$$\bar{X} - \hat{\mu} = \bar{X} - \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{2}$$

και: $$\bar{Y} - \hat{\mu} = \bar{Y} - \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2} = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{2}$$

<u>Άρα:</u> $$\frac{(\bar{X} - \bar{Y})^2}{4} + \frac{(\bar{Y} - \bar{X})^2}{4} \geq k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(\bar{X} - \bar{Y})^2 \geq k_3}$$

το k_3 τ.ω.: $P(\text{απορ } H_0 / H_0 \text{ αλ.}) = a$.

(1ος) Συνεχίζω με $(\bar{X} - \bar{Y})^2 \geq k_3$

(2ος) Συνεχίζω με $|\bar{X} - \bar{Y}| \geq k_4$

<u>1ος τρόπος:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X} \sim N(\mu_1, 1/n) \\ \bar{Y} \sim N(\mu_2, 1/n) \end{array}\right\} \Rightarrow (\bar{X} - \bar{Y}) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{2}{n}\right)$$

Όταν H_0 αληθής: $(\bar{X} - \bar{Y}) \overset{H_0}{\sim} N(0, 2/n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{2/n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

ή

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y})^2}{2/n} \overset{H_0}{\sim} N^2(0,1) = X_1^2$$

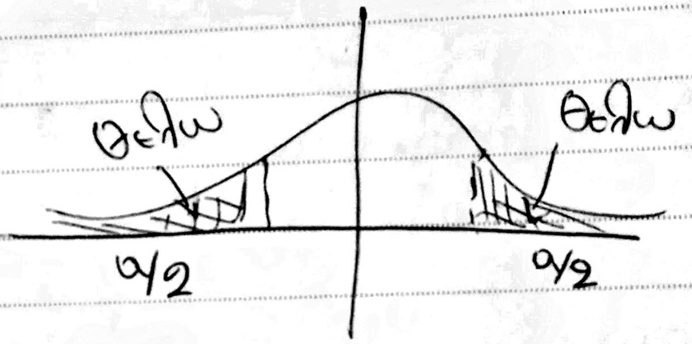
Άρα: $(\bar{x}-\bar{y})^2 \geq k_3$ ή ισοδύναμα:

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})^2}{2/n} \geq k_5$$

Επομένως $k_5 = \chi^2_{1,a}$

2ος τρόπος: $\left| \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{2/n}} \right| \geq k_6$

$\Rightarrow$ $k_6 = z_{a/2}$



Εδώ τεστ σημαντικότητας με τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας ταυτίζονται. (επειδή ξεκινάμε από ίδιες ποσότητες)

Άσκηση 3.15 + 3.16

$X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. $N(\mu_1, \sigma^2)$

$Y_1, \ldots, Y_n$ τ.δ. $N(\mu_2, \sigma^2)$

κοινή διακύμανση σ^2 άγνωστη

$H_0: \mu_1 = \mu_2 (=\mu)$, $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

Λύση

Τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας.

Υπό την H_0:

$$f(\underline{x}, \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(X_i-\mu)^2} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(Y_i-\mu)^2}$$

$\vdots$

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n}\left\{\Sigma(X_i-\hat{\mu})^2 + \Sigma(Y_i-\hat{\mu})^2\right\}$$

Σε όλο τον παραμετρικό χώρο Θ:

$$f(\underline{x}, \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(X_i-\mu_1)^2} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(Y_i-\mu_2)^2}$$

Άρα $\tilde{\mu}_1 = \bar{X}$, $\tilde{\mu}_2 = \bar{Y}$, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2n}\left\{\Sigma(X_i-\bar{X})^2 + \Sigma(Y_i-\bar{Y})^2\right\}$

Επομένως: $\lambda = \dfrac{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n}}{(2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n}} \leq k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^n \leq k \Rightarrow \boxed{\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \leq k_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2}{\underbrace{\sum(x_i-\hat{\mu})^2}_{\pm\bar{x}}+\underbrace{\sum(y_i-\hat{\mu})^2}_{\pm\bar{y}}} \leq K_1$$

$$\Rightarrow \frac{\boxed{\sum(x_i-\bar{x})^2}+\boxed{\sum(y_i-\bar{y})^2}}{\sum(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\hat{\mu})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2+n(\bar{y}-\hat{\mu})^2} \leq K_1$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{\left((n-1)S_x^2+(n-1)S_y^2\right)\left\{1+n\,\dfrac{(\bar{x}-\hat{\mu})^2+(\bar{y}-\hat{\mu})^2}{(n-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}\right\}} \leq K_1$$

$$\sum(x_i-\bar{x})^2=(n-1)S_x^2$$
$$\sum(y_i-\bar{y})^2=(n-1)S_y^2$$

Και: $\bar{x}-\hat{\mu}=\bar{x}-\dfrac{\bar{x}+\bar{y}}{2}=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{2}$

Και: $\bar{y}-\hat{\mu}=\dfrac{\bar{y}-\bar{x}}{2}$

Άρα:
$$\frac{1}{1+\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})^2}{(n-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}} \leq K_1$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})^2}{\underbrace{(n-1)S^2_x + (n-1)S^2_y}} \geq k_2$$

Το ξέρω από το δείγμα.

$$\Rightarrow \boxed{(\bar{X}-\bar{Y})^2 \geq k_3}$$

1ος τρόπος: $\bar{X}-\bar{Y} \overset{H_0}{\sim} N(0, \sigma^2 \cdot 2/n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma\sqrt{2/n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

σ: άγνωστο

Όμως: $\frac{(n-1)S^2_x + (n-1)S^2_y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{2n-2}$

και: Ανεξαρτησία

$$\Rightarrow t = \frac{\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma\sqrt{2/n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2_x + (n-1)S^2_y}{\sigma^2} \Big/ (2n-2)}} \overset{H_0}{\sim} t_{2n-2}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})^2 \geq k_3 \Rightarrow |\bar{X}-\bar{Y}| \geq k_4 \Rightarrow \boxed{k_4 = t_{2n-2, a/2}}$$

$\underline{2^{os}\ \text{τρόπος}}$

$\underline{\text{είναι}}$: $$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma\sqrt{2/n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1) \Rightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})^2}{\sigma^2\, 2/n} \overset{H_0}{\sim} X_1^2$$

$\underline{\text{και}}$: $$\frac{(n-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{\sigma^2} \sim X^2_{2n-2}$$

$$\Rightarrow$$

$$F = \frac{\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma^2\, 2/n}\Big/ 1}{\dfrac{(n-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{\sigma^2}\Big/(2n-2)} \overset{H_0}{\sim} F_{1,2n-2}$$

Απόλυτα → t TEST

Τετράγωνα → F-test

Άσκηση 33

$X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$\to \mu_a > \mu_0$ ή $\mu_a < \mu_0$

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_a : \mu = \mu_a (\neq \mu_0)$

i) Κατανομή του Z; όταν H_a αληθής

Λύση

(i) Είναι $\bar{X} \overset{H_a}{\sim} N(\mu_a, \sigma^2/n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{X} - \mu_0 \overset{H_0}{\sim} N(\mu_a - \mu_0, \sigma^2/n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_a}{\sim} N\left(\frac{\mu_a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, 1\right)$$

Κατανομή του Z υπό την H_a.

(ii) $a = P(\text{απορ. την } H_0 \,/\, H_0 \text{ αληθής})$

$b = P(\text{αποδ. την } H_0 \,/\, H_a \text{ αληθής})$

ν.δ.ο. $a + b \leq 1$

Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι: $\mu_a > \mu_0$

$$a + b = P(Z \geq z_a \,/\, Z \sim N(0,1)) + P\left(Z < z_a \,/\, Z \sim N\left(\frac{\mu_a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, 1\right)\right)$$

$$a + b = P(Z \geq z_a \,/\, Z \sim N(0,1)) + P\left(Z - \left(\frac{\mu_a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) < z_a - \left(\frac{\mu_a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \,/\, Z \sim N\left(\frac{\mu_a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, 1\right)\right)$$

$$a+b = P\left(Z \geq Z_a \,/\, Z \sim N(0,1)\right) +$$
$$+ P\left(Z_1 < Z_a - \frac{(\mu_a-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \,/\, Z_1 \sim N(0,1)\right)$$
$Z_a - (\kappa\alpha\tau) < Z_a$

$$\underbrace{\geq P\left(Z \geq Z_a \,/\, Z \sim N(0,1)\right) + P\left(Z_1 < Z_a \,/\, Z \sim N(0,1)\right)}_{= 1}$$

$Z, Z_1 \to$ απλά ένας συμβολισμός
↳ Διέπονται από την ίδια κατανομή
↳ ίδια συμπεριφορά

Άσκηση 3.11

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $U(0,\theta)$

$H_0: \theta = 1$, $H_a: \theta \neq 1$

Απορ. H_0: $X_{(n)} \leq 1/2$ ή $X_{(n)} > K$ για $K > 1/2$

a) Βρες το K ε/ω επίπεδο σημαντ. a.

b) Βρες ισχύς για $\theta < K$

Λύση

(a) $a = P(\text{απορ } H_0 \,/\, H_0 \text{ αληθής})$
$= P\left(X_{(n)} \leq 1/2 \text{ ή } X_{(n)} > K \,/\, X_1, \dots, X_n \text{ τ.δ. } U(0,1)\right)$
$\underset{(\xi\acute{\varepsilon}\nu\alpha)}{\overset{\alpha\nu\varepsilon\xi.}{=}} P(X_{(n)} \leq 1/2) + P(X_{(n)} > K)$

ΕΥΡΕΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ $X_{(n)}$

$$f_{X_{(n)}}(t) = n\,\frac{t^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < t < \theta$$

Άρα: $f_{X_{(n)}}(t) = n \dfrac{t^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < t < \theta$

$$a = \int_0^{1/2} n t^{n-1}\, dt + \int_k^1 n t^{n-1}\, dt$$

$\Rightarrow \dots \rightarrow \boxed{k = (1 + 0.5^n - a)^{1/n}}$

(β) $\gamma = P(\text{απορ. } H_0 \,/\, H_a \text{ αληθής})$

$$\gamma = P\left(X_{(n)} \leq 1/2 \text{ ή } X_{(n)} > k \,\middle/\, \begin{matrix} X_1, \dots, X_n \text{ τ.δ. } U(0,\theta) \\ \theta < k \end{matrix} \right)$$

Παίρνω τδ. από $U(0,\theta)$ με $\theta < k$. Άρα δε γίνεται το μεγαλύτερο του θ (δηλ. το $X_{(n)}$) να παίρνει τιμές $> k$

$$\gamma = P\left(X_{(n)} \leq 1/2 \,/\, X_1 \dots X_n \text{ τ.δ. } U(0,\theta), \theta < k \right) =$$

Εάν έλεγε $\theta > k$ με $k > 1/2$ θα διώχναμε το $P_{(n)} \leq 1/2$

$$\gamma = \int_0^{1/2} n \frac{t^{n-1}}{\theta^n}\, dt = \dots$$

Άσκηση 3.16

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$, μ γνωστό

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$

(i) Ομοιόμορφος ισχυρότατο; (ii) Ισχύς, όταν $\sigma_0^2 = 16$, $\sigma_1^2 = 25$, $n = 8$, $a = 5\%$

Λύση

Αρχικά θα βρω το Ισχ. τεστ για τον έλεγχο:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ (απλή)

$H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2$ $(\sigma_1^2 > \sigma_0^2)$ (απλή)

$$\frac{L_0}{L_a} \leq K \Rightarrow \frac{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\Sigma(X_i-\mu)^2}}{(2\pi\sigma_1^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\Sigma(X_i-\mu)^2}} \leq K$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\Sigma(X_i-\mu)^2\left\{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right\}} \leq K_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\Sigma(X_i-\mu)^2\left\{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right\} \leq K_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma(X_i-\mu)^2 \geq k_3} \ (*)$$

$$X_i \overset{H_0}{\sim} N(\mu, \sigma_0^2)$$

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \overset{H_0}{\sim} N(0,1) \qquad \Rightarrow$$

$$\Sigma\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0}{\sim} X_n^2 \quad \text{"} \sum_{i=1}^{n} N^2(0,1) \text{"}$$

$$\circledast \Longrightarrow \frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \geq K_4 \Longrightarrow \boxed{K_4 = X^2_{n,a}}$$

(ii) $\sigma_0^2 = 16$, $\sigma_1^2 = 25$, $n=8$, $a = 5\%$

$$\gamma = P\left(\frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \geq X^2_{8,0.05} \,/\, H_a \text{ αληθής}\right)$$

$$X_i \overset{H_a}{\sim} N(\mu, \sigma_1^2)$$

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma_1^2} \overset{H_a}{\sim} N(0,1)$$

$$\boxed{\frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{\sigma_1^2} \overset{H_a}{\sim} X^2_n}$$

Άρα αυτό το $\frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ δεν ακολουθεί X^2_n
(Δεν ξέρω τι ακολουθεί)

$$\Longrightarrow \gamma = P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{\sigma_1^2} \geq X^2_{8,0.05} \,/\, H_a \text{ αλ.}\right) \Longrightarrow$$

← Αυτό ξέρω

$$\Longrightarrow \gamma = P\left(X^2_n \geq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} X^2_{8,0.05}\right) \Longrightarrow$$

$$\gamma = 1 - P\left(X^2_n \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} X^2_{8,0.05}\right) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 1 - F_{\chi^2_n}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{8,0.05}\right)$$

Αντικατάσταση $n=8$, $\sigma_0^2=16$, $\sigma_1^2=25$
και τέλος.

3.1 έως 3.17 ← έγιναν
3.18, 3.19, 3.20, 3.21 ← όχι

} Από 3º κεφάλαιο

2.1 - 2.12, 2.14 έχουμε κάνει
2.13, 2.15 ← όχι (εκτός)

} 2º κεφάλαιο

Χρωστάμε: 1.22 (← την επόμενη φορά)
και 1.05, 1.20

Εκτός 1.2, 1.19, 1.24

} 1º κεφάλαιο

Άσκηση 1.23

Έστω $a[.]$, $b[.]$ μη αρνητικές. $\theta > 0$

τ.ω. $f(x,\theta) = a(\theta) \cdot b(x) \cdot I_{(0,\theta]}(x) =$

$= a(\theta) \cdot b(x)$, $0 < x \leq \theta$

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ.

Βρες τον Ε.Μ.Π του θ.

Λύση

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} a(\theta) \cdot b(x_i) = a^n(\theta) \prod_{i=1}^{n} b(x_i)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < X_1 < \theta \\ 0 < X_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < X_n < \theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{X_{(n)} < \theta}$$

Αντί να μεγιστοποιήσω την L μεγιστοποιώ τον $\log$.
στο π.ο. του θ.

$$\log L = n \log a(\theta) + \log \prod b(x_i) \quad , \quad X_{(n)} < \theta$$

μονοτονία => παράγωγος => πρόσημο

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{n\, a'(\theta)}{a(\theta)}$$

$\begin{cases} n \text{ θετικό} \\ a(\theta) \text{ θετικό} \end{cases}$ $\quad a'(\theta)$ πρόσημο;

Η f είναι $\boxed{\text{σ.π.π.}}$ $\Rightarrow \int_0^\theta a(\theta)\cdot b(x)dx = 1$

$\Rightarrow a(\theta)\cdot\int_0^\theta b(x)dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(\theta) = \dfrac{1}{\int_0^\theta b(x)dx} \xrightarrow[\text{ως προς } \theta]{\text{παρ/ζω}}$

$\Rightarrow a'(\theta) = \left(\dfrac{1}{\int_0^\theta b(x)dx}\right)' \Rightarrow$

$\Rightarrow a'(\theta) = -\dfrac{1}{\left(\int_0^\theta b(x)dx\right)^2}\, b(\theta) < 0$

Επομένως: $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L < 0$

$\Rightarrow$ φθίνουσα $\Rightarrow$ μέγιστο στο κάτω άκρο του π.ο.

$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = X_{(n)}}$